FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO: ANTECEDENTES Y CONSECUENTES A LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO INTEGRAL

Héctor Santiago Chávez Rivera, Ignacio Garnica y Dovala, Ana María Ojeda
chavez_santiago@yahoo.com.mx, igarnica@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx
DME del Cinvestav-IPN
Medio Superior

Resumen
Se investiga la comprensión de estudiantes de bachillerato tecnológico acerca de los fundamentos matemáticos al inicio de la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral. Se aplicó un mismo cuestionario a 61 estudiantes de quinto semestre antes de iniciar y después de finalizar la unidad de aprendizaje. El instrumento planteó nueve reactivos sobre los fundamentos matemáticos requeridos para recibir la enseñanza de la integral: los reales, su orden, propiedades y operación; longitud y definiciones equivalentes de intervalos, partición e intervalos asociados; definición de función, área bajo la curva, aproximación y notaciones simbólicas. Aunque las respuestas a los reactivos progresaron, en la segunda aplicación del cuestionario, los fundamentos matemáticos no se han consolidado o se les desconoce. Las respuestas a las preguntas sobre límites en la entrevista revelan uno de los aspectos no consolidados de los fundamentos.

Palabras clave: *Integración, funciones, intervalos, comprensión, bachillerato.*

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones planteadas en el Seminario “Docencia-Investigación de Matemática Educativa en el Bachillerato Tecnológico”, de carácter cualitativo, se realizan en el marco de un Acuerdo Académico Interinstitucional (DME-Cinvestav/CECyT No 4-IPN) y se enfocan en la comprensión de estudiantes de los fundamentos matemáticos al inicio de cada unidad de aprendizaje de matemáticas. Este informe se refiere al conocimiento adquirido del estudiante antes y después de la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral, particularmente de los fundamentos matemáticos y procesos propios del Cálculo Integral, así como a su uso de notaciones gráficas, simbólicas y en lengua natural. Por ello nos planteamos: 1) ¿Cuál es la comprensión de estudiantes de los fundamentos matemáticos al inicio de la unidad de Cálculo Integral y qué aspectos de estos fundamentos se modifican una vez concluida la enseñanza? 2) Ante un buen desempeño del estudiante en las unidades de matemáticas del bachillerato, ¿Es propenso a expresar formalmente la justificación-demostración? Es de suponerse que la enseñanza modifica algunos aspectos de los fundamentos y, también, que los estudiantes pueden acercarse a un tipo de justificación, si no formal, sí argumentada: por ejemplo, argumentan que el enunciado “$a+b=b+a$” es cierto ya que $6+11$ y $11+6$ son iguales, lo cual excluye la propiedad conmutativa.

2. MARCO CONCEPTUAL

Orton (1983b) señala que los profesores comentaban que muy pocos estudiantes realmente comprendían los procesos que realizaban. En su investigación con estudiantes de Cálculo Diferencial (Orton, 1983a) y de Cálculo Integral, el autor identificó tres *tipos de errores*: (a) los cometidos por no dar cuenta de las relaciones dadas implícita o explícitamente en los problemas en el trascurso de la solución: por ejemplo, $1/2 + 1/2n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/2 + 1/2$ (Orton, 1983b); (b) en los que por un comportamiento arbitrario no se toman en cuenta las restricciones dadas:por ejemplo, en el enunciado "Expresa los siguientes intervalos en su forma de conjunto, determina su longitud y ubica a cada uno de ellos en el plano cartesiano", se omite que no se trata de pares ordenados (véase la Figura 2, R3); y (c) por los que se obtienen resultados incorrectos de las operaciones aunque se comprendan los principios implicados: por ejemplo, $\int k\,dx = \frac{1}{2}k^2$ (Orton, 1983b). Sin grandes cambios, treinta años después, Chávez, Garnica y Ojeda (2012) señalan que es insuficiente el conocimiento de los estudiantes de bachillerato tecnológico requerido por la enseñanza al inicio de los cursos de Álgebra, Geometría y Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo Diferencial. Los autores identifican dificultades de los estudiantes incluso para solucionar problemas geométricos y de lugares geométricos en el plano cartesiano, pues la enseñanza está más centrada en la aplicación de simples reglas cuando los fundamentos matemáticos no se han consolidado o se les desconoce. No obstante esta práctica, es patente la importancia del Cálculo Integral, por no decir de la Matemática, en sus aplicaciones en otras disciplinas, como en la Física, por ejemplo. Tanto los tipos de errores como las dificultades señalan la importancia de dar cuenta de la comprensión (véase Ferrater, 1994) que los estudiantes tienen de los fundamentos matemáticos.

Las soluciones dadas, por los autores, a las tareas propuestas por Orton (1983b), muestran que la suma de términos, que expresan el producto de las longitudes de intervalos y los valores respectivos de una función, cada vez más pequeños, generalizan el concepto de integración. También, por ejemplo, determina la variación total a partir del comportamiento instantáneo que interviene en un fenómeno físico. Es decir, la integral, como concepto matemático, se refiere a la suma de un número infinito de sumandos (términos) e infinitamente pequeños. Subyacen a este concepto el de número real, sus operaciones, conjuntos de números reales, recta real y particiones, producto cartesiano, álgebra, función de variable real y límite.

3. MÉTODO

Los fundamentos matemáticos requeridos para dar solución, sin Cálculo Integral, a las tareas descritas por Orton en su artículo "Students' Understanding of Integration" (1983b) y el hecho de que la suma de términos generaliza el concepto de integración se consideraron en el diseño de nuestro cuestionario de investigación, pues la población a la que se le aplicó tendría su primer acercamiento al Cálculo Integral, un día después de la aplicación inició su curso. Participaron en la investigación 61 estudiantes de cuatro grupos de quinto semestre de bachillerato tecnológico de la Ciudad de México. El mismo cuestionario se les aplicó al inicio de la unidad de aprendizaje de Cálculo Integral y al finalizar ésta. Ambas aplicaciones duraron 50 minutos, las respuestas se registraron por escrito en las hojas que presentaron al cuestionario impreso. Luego de la segunda aplicación, en sesión videograbada se entrevistó, bajo formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999) y con hojas de control, a un estudiante seleccionado por su desempeño académico sobresaliente no sólo en el cuestionario sino en general, pues nos interesó si podría justificar sus procedimientos a tareas relacionadas con dar solución a "Demuestra que $sen(x) \leq x$ para toda $x \geq 0$".

El cuestionario. Referido a los fundamentos y a los métodos o procedimientos necesarios para recibirla enseñanza en un curso de Cálculo Integral en el bachillerato tecnológico, el instrumento incluyó la instrucción "En los cálculos no se deben hacer aproximaciones de las fracciones" y se aplicó dos veces: al inicio y al concluir la Unidad de Aprendizaje. Presentó nueve reactivos con preguntas abiertas sobre partición de intervalos, intervalos asociados a la partición, unión de intervalos, orden en los números reales, formas equivalentes de intervalos, operatividades algebraicas y aritméticas, funciones, así como el tratamiento tabular y gráfico de una función para identificar su comportamiento, área bajo la curva. Se contrastaron ambas aplicaciones del cuestionario para dar cuenta de cuáles aspectos de los fundamentos se modificaron una vez concluida la enseñanza de la Unidad de Aprendizaje de Cálculo Integral. La caracterización del cuestionario se presenta en la Tabla 1.

La entrevista. El objetivo de la entrevista fue informar acerca de la comprensión del estudiante de lo que satisface una función continua: propiedades de límites puntuales y laterales de funciones; convergencia de funciones considerando el dominio, límites laterales, límites puntuales y la existencia de un valor en particular de la función. La entrevista exploró cómo un estudiante da solución a situaciones que aún no ha enfrentado, mediante la presentación de enunciados que requieren, más que la operatividad, su decodificación y comprensión para obtener la conclusión dada en el enunciado, esto es, se exploró su sensibilidad a la demostración. La sesión, de dos horas de duración, se videograbó; todo lo que realizó el entrevistado se asentó en hojas de control para su análisis.

***Tabla 1*. Caracterización del cuestionario.**

Característica y reactivos	Objetivos	Contenidos
Conjuntos de números, intervalos y recta numérica. Reactivos 1 y 3.	Comparar y ordenar números reales de un conjunto, expresar simbólicamente los intervalos asociados, ubicarlos en la recta numérica, unirlos. Expresar intervalos dados como conjuntos y ubicarlos en el plano cartesiano.	Recta numérica, plano cartesiano, conjuntos, su unión, números enteros (-2, 0, 2, 5, 9), racionales (1/2 y 11/5) e irracionales ($-\pi$, π y e), orden en los reales y desigualdad. Partición, notación, intervalos asociados, su unión, notación y simbología.
Producto cartesiano, función, área bajo la curva y partición. Reactivo 2.	Evaluar funciones, determinar pares ordenados, graficar; operar números racionales. Proponer una manera para aproximar el área bajo la curva.	Notación de función y pares ordenados, números racionales, plano cartesiano, aproximación.
Reactivos 4 y 5.	Evaluar funciones, determinar pares ordenados, tabularlos, graficar; operar números enteros positivos. Determinar coordenadas de la función área; tabularla y graficarla. Asociar una expresión a las curvas de las funciones área.	Funciones lineal, cuadrática y constante. Notación de función y pares ordenados, tabulación, números naturales, racionales, plano cartesiano, área bajo la curva, función área.
Reactivos6 y 8.	Identificar el conjunto de puntos de una partición, los intervalos cerrados asociados y sus longitudes. Calcular el área bajo la curva usando propiedades de los números racionales.	Notación y evaluación de función, conjunto de puntos, números racionales, partición, intervalos asociados y sus longitudes, área bajo la curva, gráfica con escala numérica en abscisas, simbología.
Aproximación al área bajo la curva. Reactivo 7.	Explicar por qué la partición seleccionada genera una mayor aproximación al área bajo la curva y expresar sus intervalos asociados.	Particiones diferentes, áreas bajo la curva, intervalo cerrado e intervalos asociados, gráfica con escala simbólica en abscisas.
Función formal. Reactivo 9.	Explicar por qué un conjunto dado es una función, interpretar la pertenencia a él de un par ordenado e identificar la regla de correspondencia.	Notación conjuntista de función, notación y regla de correspondencia.

4. RESULTADOS

a) Resultados del análisis de respuestas al cuestionario

Los mismos 61 estudiantes contestaron el instrumento en cada aplicación. La Figura 1 resume el contraste del total de respuestas dadas a cada reactivo del cuestionario en sus dos aplicaciones: al inicio (CI/1) y al finalizar (C1/2) la unidad de aprendizaje. En ocho de los reactivos, excepto R3, en promedio se incrementó en un 12% el número de respuestas dadas.

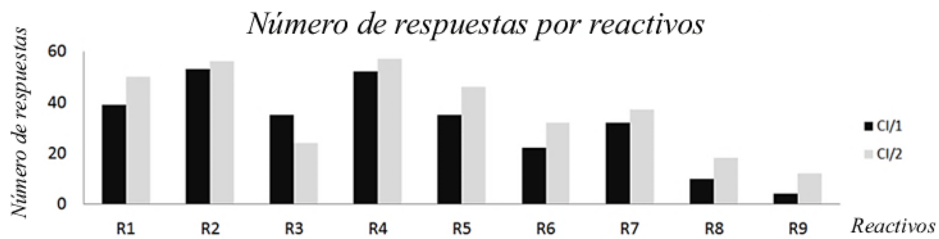

Figura 1. Total de respuestas dadas por 61 estudiantes a cada reactivo y en ambas aplicaciones del cuestionario: al inicio y al finalizar la unidad de aprendizaje.

En lo que sigue, los ejemplos proporcionados no corresponden a las respuestas de un mismo estudiante en una y otra aplicación del cuestionario.

Conjuntos de números, intervalos y recta numérica: R1 y R3 (Figuras 2 y 3). Al inicio de la unidad, para R1 64% de los estudiantes (39) enlistaron los puntos de la partición tal cual se les presentaron y los ubicaron en lugar de los intervalos asociados; éstos los expresaron como (0, x) (9, x). Sólo tres estudiantes (5%) compararon y ordenaron los seis elementos del conjunto dado, obtuvieron la unión de los conjuntos asociados, identificaron los intervalos asociados y los representaron en la recta numérica. En R3, del 57% de respuestas proporcionadas, 54% expresaron cada intervalo dado como pareja ordenada, lo ubicaron en el plano cartesiano como un punto y trazaron las distancias del punto a cada eje. Sólo dos respuestas fueron correctas (3%).

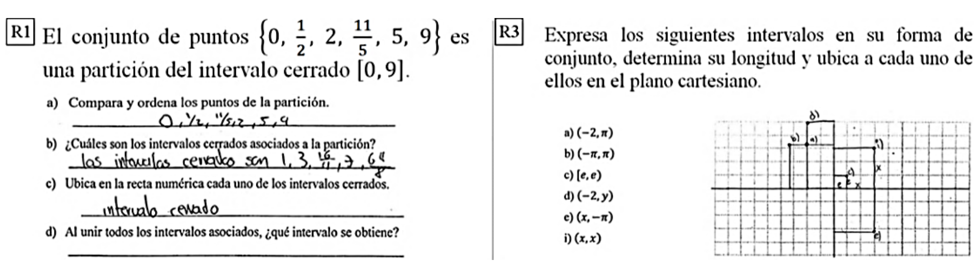

Figura 2. Respuestas tipo para R1 y R3: expresión simbólica, gráfica y escrita.

Al contrario, al final del curso los estudiantes evidenciaron su noción de intervalos cerrados asociados, su unión, su uso de la notación de intervalo y el orden en lista. Para R3, la disminución del número de respuestas sugiere que 20% de los estudiantes ya no interpretaron a los objetos dados como pares ordenados.

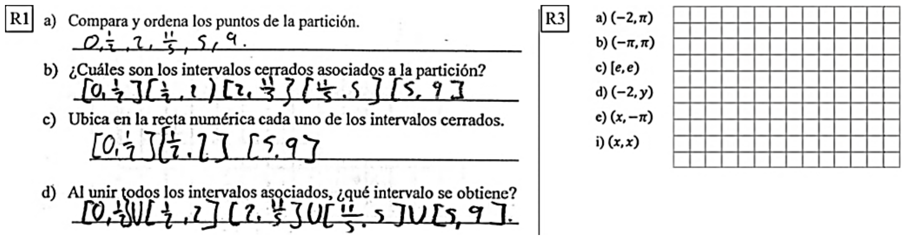

Figura 3. Reactivos R1 y R3: modificación en identificación y expresión de intervalos cerrados.

Producto cartesiano, función, área bajo la curva y partición: R2 (Figuras 4 y 5). El 87% de los estudiantes respondieron el R2. El 85% de los estudiantes contestaron los incisos a) y b), pero, excepto uno, todos aproximaron las fracciones en su expresión decimal. Aunque 23% dio un valor para el área bajo la curva, sólo dos se aproximaron a ese valor y seis expresaron procedimientos algebraicos-aritméticos. El 31% consideró el área bajo la curva. En resumen, la escala condicionó a una gráfica lineal, fue difícil la lectura de la notación del par ordenado en términos de valores de la variable independiente y de la función evaluada en ella y el significado de “área bajo la curva”.

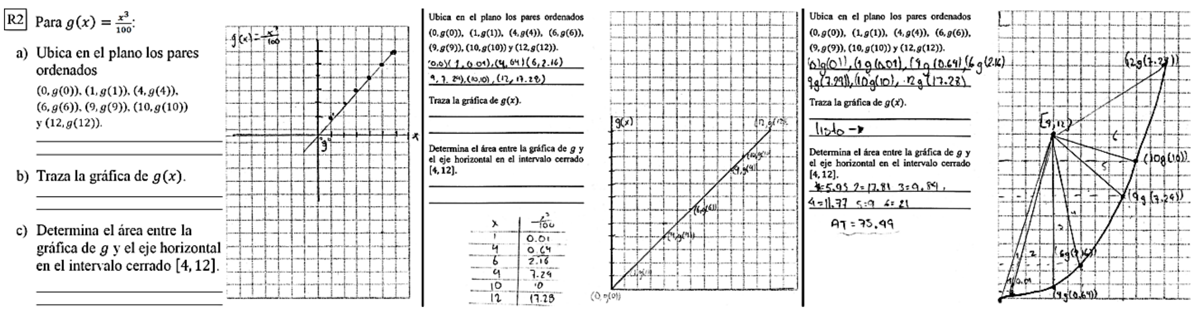

Figura 4. Respuestas tipo para R2: operatividad (escala y sustitución), expresión gráfica, escrita y simbólica.

En la segunda aplicación, los aspectos que se modificaron se relacionaron con la escala, el área bajo la curva y el método para calcular el área solicitada. El 65% aproximó el área bajo la curva considerando regiones rectangulares o triangulares y seis estudiantes escribieron la integral definida correspondiente, pero únicamente dos obtuvieron el valor numérico de la integral. En todos los casos, los valores numéricos se expresaron unidimensionalmente.

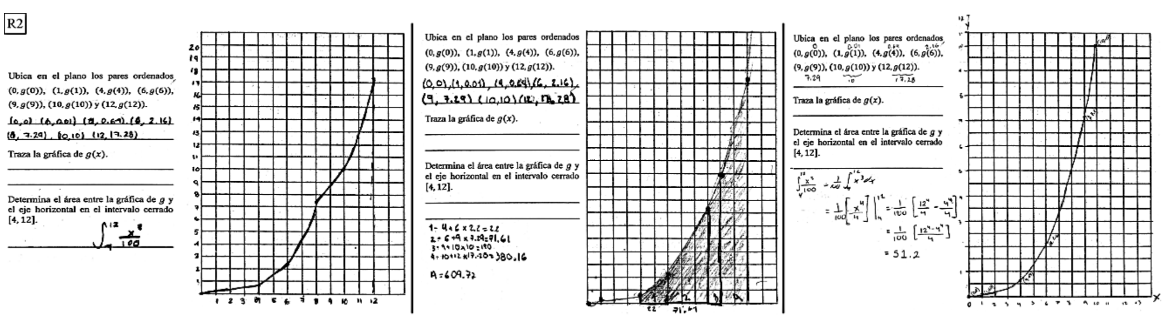

Figura 5. Reactivo R2: desempeños en la segunda aplicación.

Producto cartesiano, función, área bajo la curva y partición: R4 y R5 (Figura 6). Al inicio de la unidad, el 85% dio respuesta al R4; únicamente el 15% respondió los cuatro incisos. Nuevamente intercambiaron corchetes y paréntesis; las dificultades para obtener los vértices de los triángulos los condujeron a valores diferentes de la función área. El 57% respondió el R5 y sólo 11% respondió los cuatro incisos. Para la función constante, multiplicaron la constante por el valor de la variable independiente y, como en R4, no determinaron los vértices de los rectángulos.

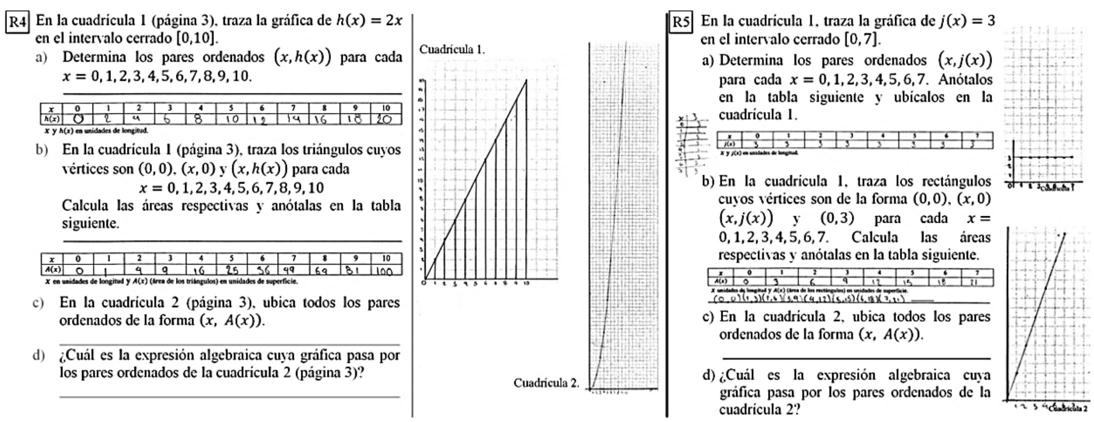

Figura 6. Respuestas dadas en los R4 y R5: operatividad (escala, sustitución), expresión tabular, gráfica, escrita y simbólica.

En la segunda aplicación, consideraron una escala que muestra la curvatura de la gráfica y asociaron una expresión algebraica de segundo grado a la gráfica de la función área. No obstante, el número de respuestas correctas se incrementó sólo en 5%.

Producto cartesiano, función, área bajo la curva y partición: *R6 y R8* (Figuras 7 y 8).En la primera aplicación, el 36% dio respuesta al R6; sólo un estudiante respondió correctamente los tres incisos. Los demás no conservaron el orden en los intervalos o usaron corchetes, la partición fue una secuencia de sus elementos y persistieron las dificultades con los intervalos cerrados asociados; a pesar de la escala propuesta en el eje horizontal, no consideraron la función dada para los cálculos, no escribieron procedimientos aritméticos o algebraicos y, al igual que en R8, la cuadrícula incluida definió tanto la partición como los intervalos asociados. El 5% dio un valor numérico para el área bajo la curva y pares ordenados o intervalos para la partición.

Del 16% que respondió el R8, sólo dos respondieron correctamente sus primeros cuatro incisos; ningún estudiante obtuvo la suma de áreas para el área bajo la curva. Se diversificó el sentido de "conjunto de puntos de la partición" a, por ejemplo, una expresión, un número o un intervalo. No asociaron la escala numérica al intervalo cerrado dado ni a los intervalos asociados cerrados de la partición. No determinaron la longitud de los intervalos cerrados asociados. Los estudiantes no manifestaron familiaridad con las notaciones $[x_i,\ x_{i+1}]$ ni $g(x_i)$ o $g(x_{i+1})$, las longitudes verticales.

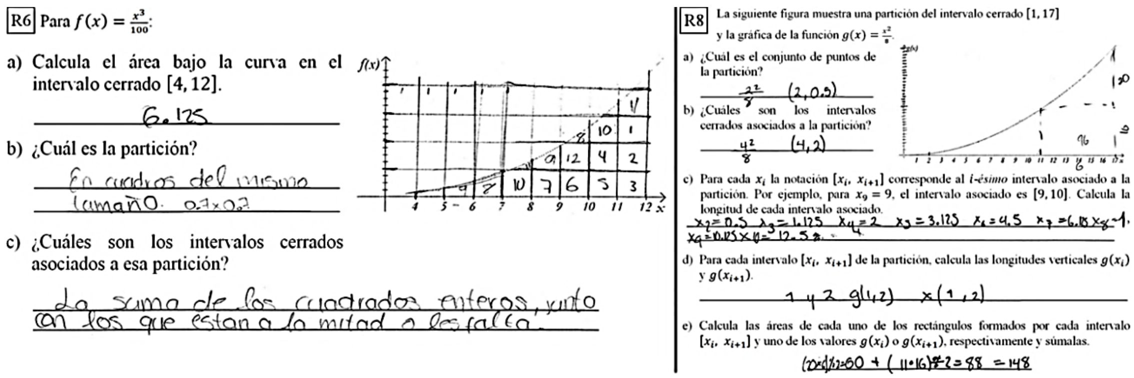

Figura 7. Ejemplo de respuestas dadas a los R6 y R8: operatividad (sustitución, simplificación y propiedades de los números racionales), de la expresión simbólica a la gráfica y a lengua natural.

Al final de la unidad de aprendizaje, en R6, al igual que en R2, el 30% aproximó el área bajo la curva considerando regiones rectangulares o triangulares y ocho estudiantes escribieron la integral definida correspondiente, pero sólo cuatro obtuvieron el valor numérico de la integral, aunque sin unidades. En R8, cinco estudiantes evaluaron la función para determinar las alturas verticales.

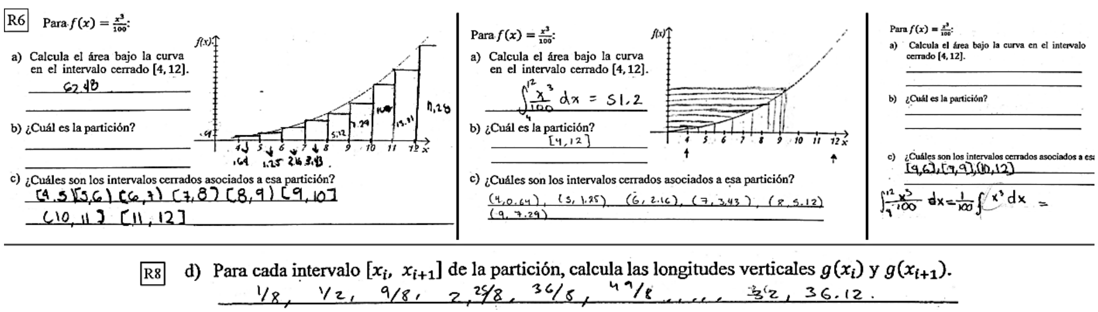

Figura 8. Reactivo R6: aproximación y aplicación de la integral para determinar el área bajo la curva. Reactivo R8: evaluación de la función para obtener las alturas.

Aproximación al área bajo la curva: *R7* (Figura 9). En la primera aplicación del instrumento, 52% de los estudiantes contestó este reactivo. El 12% seleccionó el inciso d), de los cuales tres justificaron su elección por la cantidad de puntos en la partición y los otros tres dieron los intervalos asociados a la partición. No asociaron la partición con los intervalos asociados ni éstos, a su vez, con las regiones rectangulares, es decir, una asociación conjunto-intervalo de integración. La justificación de su elección fue que a menor número de puntos para la partición, menos eran los cálculos a realizar (véase la Figura 9).

Función formal: R9 (Figura 9). En la primera aplicación, el 7% de los estudiantes contestaron este reactivo; sólo uno lo respondió correctamente y cuatro dieron la regla de correspondencia. En el inciso a), 4% (dos estudiantes) describió la definición de función y no el caso particular. No justificaron porqué el conjunto dado es una función ni contestaron qué significa $(x, y) \in f$; en lugar de ello, describieron, respectivamente, la definición de función y que el par ordenado era un elemento de la función, sin interpretarlo como $y = f(x)$. Se refirieron a la regla de correspondencia *como a conjunto*. En la segunda aplicación, el único inciso que se contestó correctamente fue el de la regla de correspondencia (iii).

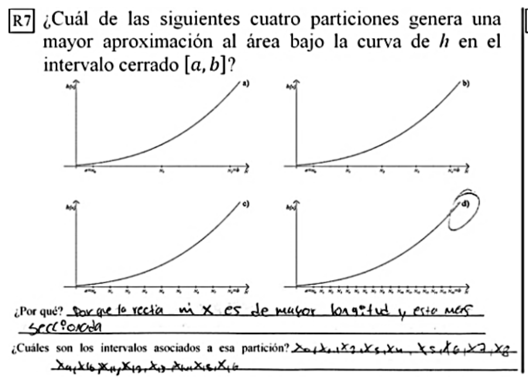

Figura 9. Respuestas tipo para R7 y R9: respectivamente, de particiones diferentes en expresión gráfica, a en lengua natural y simbólica; y función, de su expresión forma la lengua natural y simbólica.

b) Resultados del análisis de la entrevista

Al entrevistado se le pidió que: (1) describiera las propiedades de límites de funciones y porqué son verdaderas, así como otra manera de justificar la existencia del límite ordinario (límites laterales) y la definición formal de límite de una función; (2) analizara cuatro funciones para determinar el dominio, los límites laterales, la existencia o no del límite ordinario y si la gráfica de la función era o no continua; (3) describiera del análisis anterior las condiciones o propiedades que satisface una función para ser continua; (4) describiera qué es demostrar, qué es una proposición (del tipo "si … entonces"), cuáles son la hipótesis y la conclusión y, con esto, dar cuenta de cómo argumentaría para justificar formalmente la veracidad o falsedad de la proposición. El pasaje siguiente de la interacción en la entrevistase refiere a límites ordinarios y laterales de funciones ("I" denota al investigador y "E" al entrevistado):

¿Puedes dar algunas propiedades de límites para funciones?
… límite… que tenga cero o un número…
Se puede descomponer… límite de A…
Esto se aplica a la suma.
A y B, ¿qué son?… ¿Qué me representan la A y la B?

Podría ser… como una función de *x*.
¿Cuál sería una manera equivalente de calcular un límite como éste [*se refiere al de 1/x*]?
… hacia dónde tiende una función, dependiendo del valor que se le dé a *x*…
Supón que… quisiera saber el límite de eso [*se refiere a 1/x*] cuando *x* tiende a cero. ¿A qué sería igual? *Aún no llega a los límites laterales.*
¿Podrías… rápidamente trazar la gráfica de esa función?

[Véase hoja de control, Figura 10].
I Muy bien. Ve, aquí no puedo calcular el límite
E en cero.
No, porque se van separando.
E …he escuchado que para comprobar un límite hay que calcularlo por la izquierda y por la
I derecha.
…A eso es a lo que quiero llegar. ¿Qué haces cuando calculas el límite por la izquierda y por la derecha?...
Para decirme que el límite ordinario es tal.
E …es para saber si la función es continua.
I ¿Cómo se denotan los límites laterales?
E Creo que se le pone un más y un menos.

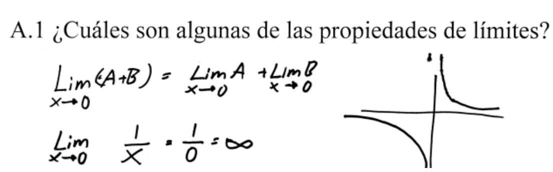

Figura 10. En el guion de entrevista: límites y sus propiedades para funciones.

5. Comentarios y conclusiones

El orden en los reales, para los estudiantes, está implícito en la lista ascendente o en la recta numérica. De la primera a la segunda aplicación, los intervalos asociados pasaron de ser una lista de valores numéricos, o de intervalos abiertos, o una ubicación en la recta numérica, a intervalos cerrados cuyos extremos son elementos de la partición dada. Para ubicar los intervalos asociados les fue suficiente ubicar los extremos en la recta numérica y remarcarlos, es decir, no distinguieron entre la ubicación de los puntos y los intervalos en la recta numérica.

Aún en la segunda aplicación persistió una inconsistencia tanto en la operatividad como en lo que es un conjunto, en particular con la unión de conjuntos y lo manifestado en el R3, pues a partir de la notación de intervalo con paréntesis no se expresó su equivalente en notación de conjunto. En R2, un caso no aproximó al evaluar la función, además de que usó las formas fraccionarias al graficar. Aún hubo casos que desconocieron a la función g en el par $(x, g(x))$, al que igualaron a (x, x); restaron importancia a lo que g representara y, en consecuencia, su gráfica sería lineal; en otros casos, por la escala resultó lineal. No obstante, que tanto notación como fundamentos, en particular los del concepto de número, se han venido preparando desde la educación básica y a lo largo de todas las unidades de aprendizaje, su comprensión, en general, no se ha logrado.

La enseñanza debería influir en aspectos formales y técnicas para la solución de problemas: que los estudiantes se percaten de las relaciones y las restricciones dadas en los enunciados y que apliquen correctamente los principios implicados. Es decir, que no cometan los errores señalados por Orton (1983b) o que no se apliquen simples reglas (Chávez, Garnica y Ojeda, 2012) de operatividad. Por ello, proponemos introducir temas como Lógica Proposicional, Conjuntos, Relaciones Binarias, hasta Polinomios. Véanse, por ejemplo, las notas “Elementos de Álgebra” de Abad (2003) disponibles por internet. Esta propuesta es viable en el Bachillerato Tecnológico en el que se disponen de 18 horas independientes de las asignadas a sus clases para ampliar o profundizar en los temas enseñados.

6. Referencias

Abad, M. (2003). *Elementos de Álgebra*. Bahía Blanca: Universidad Nacional del Sur, Buenos Aires.

Chávez, R.; Garnica, I. y Ojeda, A.M. (2012). Fundamentos matemáticos de estudiantes de bachillerato tecnológico: antecedentes a la enseñanza del cálculo diferencial. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.), *Memorias de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa 15,* 307-316. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Ferrater, J. (1994). *Diccionario de Filosofía*. Tomo I, pp. 602-604. España: Ariel.

Orton, A. (1983a). Students’ Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18. Dordrecht, Holland y Boston, USA: Reidel Publishing Co.

Orton, A. (1983b). Students’ Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 235-250. Dordrecht, Holland y Boston, USA: Reidel Publishing Co.

Zazkis, R. & Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 429-439. USA: Elsevier Science Inc.